

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι, 2/9/2016, διδασκων Α. Τόλιας

Θέμα 1. [2μ]

(A) Δίνεται ότι η ακολουθία πραγματικών αριθμών $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι αύξουσα. Να δείξετε ότι:

(i) Αν η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι φραγμένη άνω, τότε είναι συγκλίνουσα.

(ii) Αν η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ δεν είναι φραγμένη άνω, τότε $\lim a_n = +\infty$.

(B) Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα ισοσυγκλινοσών ακολουθιών.

Θέμα 2. [3μ]

(A) Οι ακολουθίες $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ορίζονται αναδρομικά ως εξής:

$$a_1 = 5 \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + a_n}$$

$$\beta_1 = 2 \quad \beta_{n+1} = 3 + \sqrt{\beta_n - 1}$$

Να εξεταστούν οι παραπάνω ακολουθίες ως προς τη σύγκλιση, και να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα όριά τους.

(B) Για καθεμιά από τις παρακάτω ακολουθίες, να βρεθεί το όριό της (αν υπάρχει) ή ναδειχθεί ότι η ακολουθία δεν έχει όριο. (Και στις δύο περιπτώσεις απαιτείται πλήρης δικαιολόγηση).

$$x_n = \sqrt[n]{5^n + n^2 \cdot 4^n} \quad y_n = \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right) \quad z_n = \sqrt[n]{2^n + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}}$$

$$w_n = \sqrt[n]{3^n + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}} \quad r_n = \cos\left(\frac{\pi n^2 + 3n}{-4n^2 + 6n}\right)$$

Θέμα 3. [2μ]

(A) Αποδείξτε ότι $\frac{\log(x)}{x} \leq \frac{1}{e}$ για κάθε θετικό αριθμό x και ότι η ισότητα ισχύει μόνο για $x = e$.

Στη συνέχεια να συγκρίνετε τους αριθμούς e^π και π^e .

(B) Έστω $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο συνεχείς συναρτήσεις ώστε να ισχύει $f(q) = g(q)$ για κάθε ρητό αριθμό q . Ναδειχθεί ότι $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Θέμα 4. [1.5 μ]

Έστω $f : [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε επίσης ότι $f(a) = 1 = f(\beta)$ και ότι η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο (a, β) με $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, \beta)$. Ναδειχθεί ότι $f(x) \neq 1$ για κάθε $x \in (a, \beta)$. Στη συνέχεια δείξτε ότι είτε $f(x) > 1$ για κάθε $x \in (a, \beta)$ ή $f(x) < 1$ για κάθε $x \in (a, \beta)$.

Θέμα 5. [2μ]

(A) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = |x| \sin x$ είναι παραγωγίσιμη και να υπολογιστεί η f' . Στη συνέχεια να εξετάσετε ως προς την παραγωγισιμότητα την f' .

(B) Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2 \cos\left(\frac{2}{x}\right)$ για κάθε $x \neq 0$ και $f(0) = 0$. Να δείξετε ότι η f είναι παντού παραγωγίσιμη και ότι η f' δεν είναι συνεχής στο 0.

Καλή Επιτυχία!